شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر گذر صوتی ناپایدار تناوبی با استفاده از الگوریتم فوریه مبنا*

محمدرضا محقق(۱)   مجید ملک جعفریان(۲)

چکیده *تحقیق حاضر جریان گذر صوتی ناپایدار حول ایرفویل‌های نوسانی را از طریق حل معادلات اویلر و ناویر استوکس و با استفاده از روش طیفی زمانی شبیه‌سازی کرده است و نتایج حاصل را با روش‌های قدیمی برای حل مسائل ناپایا نظیر فرمولاسیون تفاضلی پسرو و روش صریح شبکه‌ی سازمان یافته‌ی تطبیق‌پذیر، مقایسه می‌کند. روش طیفی زمانی از یک تبدیل فوریه گسسته در زمان استفاده می‌کند و از این رو، حل مستقیماً در یک حالت تناوبی منطبق بر فیزیک جریان، پیش می‌رود. ابزار ریاضی استفاده‌شده در این‌جا تبدیلات مستقیم و معکوس فوریه می‌باشند. صحت الگوریتم حاضر از طریق پیاده‌سازی بر چند نمونه تست آیرودینامیکی دو بعدی تأیید شده است. این نمونه تست‌ها ایرفویل‌های نوسانی نوع NACA 64A010 (مدل CT6) و نوع NACA 0012 (مدل CT1 و CT5) می‌باشند. به دلیل طبیعت آشفته‌ی جریان لزج در این نمونه تست‌ها، مدل آشفته Baldwin-Lomax برای آنالیز جریان لزج با دامنه‌ی نوسان بالا (مدل CT5) مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل از روش طیفی زمانی با نتایج آزمایشگاهی و دو روش ذکر شده، مقایسه شده است. نتایج ارائه شده توسط این روش، در عین حفظ دقت، کاهش چشمگیری را در هزینه‌ی محاسبات نسبت به دو روش دیگر نشان می‌دهد، چرا که جریان از طریق تبدیلات فوریه مستقیماً به‌صورت تناوبی حل شده و از دقت طیفی برخوردار است. نتایج نشان می‌دهد که برای تسخیر فیزیک جریان، به تعداد فواصل زمانی اندکی (تنها چهار فاصله‌ی زمانی) در یک پریود نوسان ایرفویل در هر دو حالت دامنه‌ی نوسان پایین (مدل CT6) و دامنه‌ی نوسان بالا (مدل CT5)، در مقایسه با دیگر روش‌ها نیاز است.*

واژه‌های کلیدی روش طیفی زمانی، جریان گذر صوتی ناپاپایدار، ایرفویل نوسانی، تبدیلات فوریه گسسته، مدل آشفته بالدوین–لوماکس (Baldwin-Lomax).

Periodic Unsteady Transonic Compressible Flow Simulation using Fourier-Based Algorithm

M.R. Mohaghegh   M. Malek Jafarian

Abstract *The present research simulates time-periodic unsteady transonic flow around pitching airfoils via the solution of unsteady Euler and Navier-Stokes equations, using Time Spectral Method (TSM) and compares it with the traditional methods such as BDF and Explicit Structured Adaptive Grid Method. The TSM uses a Fourier representation in time and hence solves for the periodic state directly according to physics of flow. Mathematical tools used here are discrete Fourier transformations. The TSM has been validated with 2D external aerodynamics test cases. These test cases are NACA 64A010 (CT6) and NACA 0012 (CT1 and CT5) pitching airfoils. Because of turbulence nature of flow, Baldwin-Lomax turbulence model has been used in viscous flow analysis with large oscillation amplitude (CT5 type). The results presented by the TSM are compared with experimental data and the two other methods. By enforcing periodicity and using Fourier representation in time that has a spectral accuracy, tremendous reduction of computational cost has been obtained compared to the conventional time-accurate methods. Results verify the small number of time intervals per pitching cycle (just four time intervals) required to capture the flow physics with small oscillation amplitude (CT6) and large oscillation amplitude (CT5) as compared to two other methods.*

Key Words Time Spectral Method, Unsteady transonic flow, Pitching airfoil, Discrete Fourier transform, Baldwin-Lomax turbulence model.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۱۱/۲۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/٤/۱۱ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند.

مقدمه

اکثر دستگاه‌هایی که بر مبنای اصول مکانیک سیالات نیروی بالابر مفید و یا نیروی جلوبرنده تولید می‌کنند، برای عمل کردن در یک محیط سیال طراحی می‌شوند که این محیط یا پایا و یا به‌طور نوسانی ناپایا است.

محاسبات جریان ناپایدار به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله در آنالیز بال‌زن‌ها (flutter)، جریان حول پره‌های هلیکوپتر، جریان در توربوماشین‌ها، جریان حول پره‌های توربین و جریان حول مکانیزم‌های جلوبرنده‌ی نوسانی. در این جا هدف به‌کارگیری الگوریتمی است که بتواند رفتار این جریان‌ها را با استفاده از تکنیک‌های دینامیک سیالات عددی (CFD) پیش‌گویی کند.

بررسی و حل جریان ناپایدار تناوبی عبورکننده از ایرفویل‌های نوسانی، به‌طور گسترده‌ای در علوم هوانوردی کاربرد دارد. از جمله مطالعات پیشگام و جامع در این زمینه می‌توان به تحقیقات مک کراوسکی [1, 2] اشاره کرد. وی مطالعه‌ی گسترده‌ای بر رفتار جریان حول ایرفویل ناپایا انجام داد. در ادامه تحقیقاتی شامل روش‌های عددی برای شبیه‌سازی جریان تناوبی انجام شده است از جمله روج و همکاران [3]، اندرسون و همکاران [4]، میتال [5]، یانگ و همکاران [6]، ژائو و سایرین [7] و یانگ و همکاران [8].

در آنالیز این گونه مسائل، استفاده از الگوریتمی که بتواند از خاصیت پریودیک جریان استفاده کند، می‌تواند مناسب‌تر باشد. روش‌های گام‌زنی زمانی سنتی این خاصیت را در نظر نمی‌گیرند. اکثر روش‌های حل توسعه‌یافته در گذشته، به صورت گام‌زنی قدم‌به‌قدم در زمان می‌باشد. این بدان علت است که در امتداد زمان، حل در هر زمان تنها می‌تواند در حل زمان بعدی (آینده) تأثیر بگذارد. این رفتار شبه سهموی از مختصات زمان، برای پیش‌گویی جریان‌های ناپایدار غیرتناوبی مناسب می‌باشند. اما در مورد مسائل ناپایدار تناوبی این فرض تأثیر رو به جلو چندان معتبر نیست، بلکه حل هر زمان، حل در همه‌ی زمان‌های دیگر در داخل سیکل را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

طرح‌های صریح برای پایداری از گام‌های زمانی کوچک استفاده می‌کنند که این باعث افزایش زمان حل می‌شود. از طرفی، طرح‌های ضمنی اگرچه از مقادیر گام‌زمانی بزرگ‌تری استفاده می‌کنند، اما به دلیل فرآیند تکرار طولانی جهت همگرا شدن، هزینه‌بر می‌باشند خصوصاً برای مسائل سه بعدی که زمان حل یک فاکتور مهم در ارزیابی مزیت روش عددی می‌باشد.

یک نکته‌ی مهم در محاسبات جریان‌های ناپایدار، تعادل بین دقت روش و هزینه ی محاسباتی آن روش برای یافتن حل مورد نظر می‌باشد. دقت‌های بالا و مدل‌های دقیق یا از لحاظ دسترسی به سخت‌افزار مورد نیاز محدودیت دارند، و یا بسیار زمان‌بر هستند. از طرفی اکثر مدل‌های مرتبه‌ی پایین قسمتی از فیزیک مسأله را نادیده فرض می‌کنند. برخی روش‌های سنتی نظیر روش شبکه‌ی سازمان‌یافته‌ی تطبیق‌پذیر صریح (Explicit Structured Grid Method) (پسندیده فرد و همکاران [9])، به‌دلیل محدودیت در انتخاب گام زمانی اساساً زمان‌بر هستند. هم‌چنین در روش‌هایی سنتی دیگر مانند فرمولاسیون تفاضلی پسرو (Backward Difference Formula (BDF)) اگر گام زمانی به اندازه‌ی کافی کوچک گرفته نشود دقت حل پایین می‌آید و یا ممکن است مسأله همگرا نشود و اگر گام‌های زمانی کوچکی در نظر بگیریم زمان حل نیز افزایش خواهد یافت. بنابراین یک الگوریتم مناسب، الگوریتمی است که در عین کاهش زمان حل، از دقت مطلوبی نیز برخوردار باشد.

در سال‌های اخیر محققان به الگوریتم‌های فوریه مبنا (Fourier- based algorithms) جهت کاهش هزینه‌ی محاسبات در آنالیز مسائل ناپایدار پریودیک، رو آورده‌اند. هال و سایرین [10] اولین مطالعه در این زمینه را در سال ۲۰۰۰ انجام دادند. آنها روش تعادل

هارمونیک (Harmonic Balanced method) را برای حل معادلات غیر خطی در حوزه‌ی فرکانسی پیشنهاد دادند.

متعاقباً مک مولن و همکاران [17-15] روش حوزه‌ی فرکانسی غیرخطی (Non-linear Frequency Domain (NLFD)) را معرفی کردند. در این روش معادلات فیزیکی ابتدا به حوزه‌ی فرکانسی منتقل و در آن‌جا حل می‌شوند. سپس حل مورد نظر (متغیرهای جریان) به حوزه‌ی فیزیکی بازگردانده می‌شوند. لذا برای استفاده از این روش به تغییرات اساسی در یک حل‌کننده‌ی جریان معمول نیاز است. چرا که این روش نیازمند استفاده از تبدیلات مستقیم و معکوس فوریه (Fast Fourier Transform (FFT) and Inverse Fast Fourier Transform (IFFT)) می‌باشد.

در سال ۲۰۰۵، گوپیناث و جیمسون [18] استفاده از ماتریس کالوکیشن فوریه (Fourier collocation matrix) را برای گسسته‌سازی جمله‌ی مشتق زمانی در معادلات جریان و جلوگیری استفاده از FFT و IFFT پیشنهاد کردند. در این صورت، کمترین تغییرات در یک حل‌کننده زمان دقیق ایجاد می‌شود. این طرح، روش طیفی زمانی ((Time Spectral method (TSM) نامیده می‌شود. در ادامه باتسانترن و جیمسون [19, 20]، سیکت و همکاران [21]، سو و یانگ [22] و یانگ و ماوریپلیز [23, 24] برای شبیه‌سازی مسائل مختلف ناپایدار تناوبی از این روش استفاده کردند. هم‌چنین آنتثام و کور [25] جریان‌های غیر قابل تراکم تناوبی را با روش TSM شبیه‌سازی کرده اند.

در این روش جمله‌ی مشتق زمانی مربوط به مرحله‌ی زمانی (time level) n-اُم، $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_n$، همه‌ی فواصل زمانی حل در یک پریود (به‌جز خود مرحله‌ی زمانی n) را از طریق ماتریس کالوکیشن فوریه به هم کوپل می‌کند. لذا بر خلاف روش‌های تفاضل محدود که تنها چند حل مربوط به مراحل زمانی قبل (در طرح‌های صریح) یا بعد (در طرح‌های ضمنی) را در محاسبه‌ی مشتق در مرحله‌ی زمانی مربوط درگیر می‌کنند، TSM تمام مراحل زمانی در یک پریود را در محاسبه‌ی مشتق در یک مرحله‌ی زمانی خاص (n-اُم) در نظر می‌گیرد. لذا از این لحاظ روشی با دقت بالا می‌باشد. برخلاف روش‌های گام‌زنی زمانی قدم‌به‌قدم، در این روش متغیرهای جریان در تمام مراحل زمانی به‌طور هم‌زمان حل می‌شوند و این فرآیند تا رسیدن به یک حالت پایدار پریودیک تکرار می‌شود.

به دلیل ماهیت آشفته‌ی جریان مورد مطالعه در این تحقیق می‌بایست یک مدل توربولانسی برای آنالیز جریان لزج به کار گرفته شود. مدل به کار رفته، یک مدل جبری ارائه‌شده توسط بالدوین و لوماکس [26] است، با این مزیت که برای جریان‌های با سرعت بالا مناسب است و به کارگیری آن در مقایسه با مدل‌های kε و kω به‌مراتب ساده‌تر می‌باشد و در عین حال دقت نسبتاً مناسبی را به‌دست می‌دهد.

در این مقاله روش TSM هم برای جریان غیر لزج و هم جریان لزج به‌همراه مدل آشفته‌ی بالدوین-لوماکس برای شبیه‌سازی نمونه تست‌های آیرودینامیکی (ایرفویل‌های نوسانی) استفاده شده است. این تست‌ها عبارتند از ایرفویل NACA 64A010 مدل CT6 با دامنه‌ی نوسان کوچک و فرکانس کاهشی بالا، و ایرفویل ناکا NACA 0012 مدل‌های CT1 CT5 با دامنه‌ی نوسان بیش‌تر و فرکانس کاهشی به‌نسبت کم‌تر (از مدل CT6). نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی و دو روش عددی دیگر مقایسه و اعتبار سنجی شده‌اند. دو ایرفویل NACA 64A010 و NACA 0012 به‌ترتیب توسط دیویس [27] و لاندن [28] آزمایش شده‌اند.

یکی از دلایل انتخاب این ایرفویل‌ها برای شبیه‌سازی عددی جریان، استفاده‌ی فراوان آن‌ها در مطالعات آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی می‌باشد. کاربرد این ایرفویل‌ها در روش‌های عددی بسیار

معمول می‌باشد، لذا بـه دفعـات در تحقیقـات محققـان مورد استفاده قرار گرفته است.

بنا بر ویژگی‌های ایرفویل CT6 (مطابق جـدول ۱) این یـک ایرفویـل متقـارن گـذر صـوتی اسـت کـه در گستره‌ی محدودی از زاویه‌ی حمله نوسان می‌کند. ابتدا این مدل با روش طیفی زمانی توسط معادلات غیرلـزج بررسی می‌شود. در ادامه جریـان لـزج حـول ایرفویـل CT5 مورد بررسی قرار خواهد گرفت. از آن‌جا که این ایرفویل دامنه‌ی نوسان به نسبت بزرگ‌تـری دارد و لـذا آشفتگی بیش‌تری در جریان لزج ایجاد می‌کند، در ایـن کار، بـرای شـبیه‌سـازی جریـان لـزج آشـفته بـا مـدل توربولانسی بالدوین- لوماکس، از ایرفویـل مـدل CT5 استفاده شده است.

در انتهـا، بـه‌منظـور بررسـی مزیـت TSM در شبیه‌سازی جریان ناپایدار متناوب، نتایج عددی به‌دست آمـده از ایـن روش بـا نتـایج روش‌هـای شـبکه‌ی سازمان‌یافته‌ی تطبیق‌پذیر و BDF مقایسه شـده اسـت. بررسی ما نشان می‌دهد، زمانی که کار این مقاله شـروع شده بود، روش طیفی زمانی برای نمونه‌ی ایرفویـل‌هـا با زوایای نوسان مختلف (در هر دو حالت کم و زیـاد) به کار نرفتـه و چنـین آنـالیز مقایسـه‌ای گسـترده‌ای در دسترس نبود. در این تحقیق مزیت TSM توسط نتـایج به‌دست آمده و این مقایسه‌ها، نشان داده شده است.

معادلات حاکم

مسأله‌ی فیزیکی مورد مطالعه در ایـن تحقیـق، جریـان تراکم‌پذیر حـول یـک ایرفویـل نوسـانی مـی‌باشـد. در حالت کلی جریان‌هـای تـراکم پـذیر توسـط معـادلات نـاویر-اسـتوکس (Navier–Stokes Equations) مـدل می‌شوند. شکل دیفرانسـیلی پایسـتار معـادلات نـاویر- استوکس دوبعدی در مختصات کارتزین به‌صورت زیـر می‌باشد:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f_v}{\partial x}+\frac{\partial g_v}{\partial y} \qquad (۱)$$

که در این رابطه w بـردار مجهـولات (متغیـرهـای جریان) و f و g بردارهای شار جابـه‌جـایی و gv و fv بردارهای شار لزج به‌ترتیب در جهات x و y می‌باشـند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$w=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

$$f=\begin{bmatrix}\rho(u-x_t)\\ \rho u(u-x_t)+p\\ \rho v(u-x_t)\\ \rho e(u-x_t)+pu\end{bmatrix},\quad g=\begin{bmatrix}\rho(v-y_t)\\ \rho u(v-y_t)\\ \rho v(v-y_t)+p\\ \rho e(v-y_t)+pv\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

$$f_\upsilon=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}-q_x\end{bmatrix}$$

$$g_\upsilon=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}-q_x\end{bmatrix} \qquad (٤)$$

با توجه به این که شـبکه‌ی حـل در ایـن‌جـا یـک شبکه‌ی متحرک می‌باشـد، جمـلات x_t و y_t بـه‌ترتیـب سرعت شبکه در راستای x و y می‌باشند. هم‌چنـین در روابط فوق ρ چگالی، u و v مؤلفه‌های سرعت جریان در راستای x و y، p فشار استاتیک و e مجموع انرژی داخلی و جنبشی بر واحد جرم است. با توجه به این‌که در این‌جا سیال هوا مـی‌باشـد چنـدان دور از واقعیـت نیست که از معادلات گاز کامل استفاده کنیم. لذا انرژی جنبشی به‌صورت

$$e=\frac{p}{\rho(\gamma-1)}+\frac{1}{2}(u^2+v^2) \qquad (۵)$$

و دما از رابطه‌ی

$$T = \frac{p}{\rho R} \tag{٦}$$

محاسبه می‌شود، که R ثابت هوا می‌باشد.

جهت گسسته‌سازی بردارهای شار، از طرح تفاضل مرکزی مرتبه دو به‌همراه یک طرح اتلاف مصنوعی (artificial dissipation) استفاده شده است. در حقیقت، ترکیب جملات اتلاف مصنوعی با طرح تفاضل مرکزی، طرحی مشابه طرح بالادست (Upwind) می‌سازد، لذا این ترکیب قادر به تشخیص جهت جریان می‌باشد و می‌تواند به‌خوبی امواج ضربه‌ای را تسخیر کند. در کار حاضر از طرح اتلاف مصنوعی JST (جیمسون- اشمیت- تورکل [29]) استفاده شده است. در این مدل، ترکیبی از جملات مرتبه‌ی اول و سوم به‌منظور تشکیل جمله‌ی اتلاف مصنوعی استفاده می‌شود. جملات مرتبه‌ی اول به منظور جلوگیری از نوسانات در نزدیکی موج‌های ضربه‌ای (shock waves) استفاده می‌شوند، در حالی که جملات مرتبه‌ی سوم، به‌منظور پایداری و همگرایی حل‌های حالت دائم، مهم هستند. که ترکیب آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d = \varepsilon^{(2)}\Delta x^3 \frac{\lambda}{p}\left|\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|\frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon^{(4)}\Delta x^3 \lambda \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

جمله‌ی اتلاف مصنوعی در طرح مذکور به دو جمله در جهات ξ و η تقسیم می‌شود، که $\varepsilon^{(2)}$ و $\varepsilon^{(4)}$ ثوابت قابل تنظیم و λ شعاع طیفی ماتریس ژاکوبین می‌باشد.

روش طیفی زمانی

اساس این روش بر مبنای تبدیلات فوریه‌ی گسسته (discrete Fourier transformations) برای گسسته‌سازی جمله‌ی ناپایداری در معادلات حاکم می‌باشد. از آن‌جا که ما یک تبدیل گسسته‌ی فوریه را برای یک تابع تناوبی تعریف می‌کنیم، استفاده از این تبدیلات به‌ناچار حل را در یک وضعیت متناوب قرار می‌دهد که این مطابق با فیزیک مسأله و مطلوب ما است. تبدیل فوریه‌ی گسسته از یک تابع متناوب w با دوره‌ی تناوب T به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{w}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w^n e^{-ik\frac{2\pi}{T}n\Delta t} \tag{٧}$$

و تبدیل معکوس آن

$$w^n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{w}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}n\Delta t} & : \text{ N is even} \\ \displaystyle\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \hat{w}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}n\Delta t} & : \text{ N is odd} \end{cases} \tag{٨}$$

که پریود زمانی T به N فاصله‌ی زمانی مساوی تقسیم شده است. لذا گام زمانی برابر است با $\Delta t = \frac{T}{N}$. و تبدیل فوریه‌ی مشتق زمانی تابع w در n-اُمین فاصله‌ی زمانی که به مشتق طیفی (Spectral derivative) معروف می‌باشد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D_t w^n = \frac{2\pi}{T}\sum_{j=0}^{N-1} d_n^j w^j \tag{٩}$$

همچنین d_n^j بیانگر یک ماتریس است که به ماتریس کالوکیشن فوریه (Fourier Collocation Matrix) معروف می‌باشد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود [30] (برای اطلاع بیشتر به [30] رجوع شود):

$$d_n^{j\,even} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{n-j}\cot(\frac{\pi(n-j)}{N}) & : n \neq j \\ 0 & : n = j \end{cases}$$
(۱۰-۱)

و

$$d_n^{j\,odd} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{n-j}\mathrm{cosec}(\frac{\pi(n-j)}{N}) & : n \neq j \\ 0 & : n = j \end{cases}$$
(۱۰-۲)

به دلیل متناوب بودن جریان نسبت به زمان، هر یک از متغیرهای جریان (بردار حالت w) به‌طور تناوبی در یک دوره‌ی تناوبی معین T، تکرار می‌شوند. لذا بردار متغیرهای جریان نسبت به زمان متناوب است. در نتیجه می‌توان مشتق طیفی آن را نسبت به زمان در n-اُمین فاصله‌ی زمانی با استفاده از رابطه‌ی (۹) محاسبه کرد. با فرض این‌که حجم سلول $\forall$ نسبت به زمان تغییر نکند (که این‌گونه نیز هست)، شکل نیمه‌گسسته‌ی (semi-discrete) معادلات حاکم برای یک شبکه‌ی معین در دامنه‌ی حل به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\forall D_t w^n + R(w^n) = 0 \qquad (۱۱)$$

که $R(w) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{iv}}{\partial x_i}$ شامل مجموع بردارهای لزج و غیر لزج می‌باشد. w^n جمله‌ی حاصل از انفصال بردارهای شار میباشد، که به جمله‌ی باقیمانده معروف می‌باشد. رابطه‌ی برداری (۱۱) یک دستگاه معادله می‌باشد. برای حل این دستگاه، معادلات را در یک زمان کاذب با طرح گام‌زنی زمان صریح تا رسیدن به حالت متناوب پایدار پیش می‌بریم. لذا با اضافه کردن یک ترم مشتق زمانی کاذب به معادله‌ی (۱۱)، به معادله‌ی نهایی برای حل دست خواهیم یافت:

$$\forall \frac{dw^n}{d\tau} + \forall D_t w^n + R(w^n) = 0 \qquad (۱۲)$$

این روش حل را اصطلاحاً گام‌زنی زمانی دوتایی صریح (explicit dual time stepping) نامند. که دو زمان اشاره به زمان‌های کاذب τ و زمان واقعی t دارد.

اکنون بایستی دستگاه معادلات (۱۲) با یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات، حل شود و تا رسیدن به یک حل پایدار پریودیک ادامه یابد. برای این منظور در تحقیق حاضر، روش رانگ-کوتای پنج مرحله‌ای [31] مورد استفاده قرار گرفته است. یک طرح گام‌زنی زمانی رانگ- کوتای M مرحله‌ای به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= w^{(m)} \\ w^{(1)} &= w^{(0)} - \alpha_1 \Delta t R(w^{(0)}) \\ &\vdots \\ w^{(K)} &= w^{(0)} - \alpha_k \Delta t R(w^{(k-1)}) \\ &\vdots \\ w^{(m+1)} &= w^{(M)} \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که m تعداد تکرارها در زمان کاذب و M تعداد کل مراحل حل می‌باشد. که ضرایب موجود در معادلات (۱۳) برای ایجاد بیش‌ترین پایداری در طرح به‌صورت زیر تعریف شده است [31]:

$$\alpha_1 = \frac{1}{4},\ \alpha_2 = \frac{1}{6}\ \alpha_3 = \frac{3}{8},\ \alpha_4 = \frac{1}{4}\ \alpha_5 = 1$$

شرایط اولیه و مرزی

در این مسأله شرایط جریان آزاد به‌عنوان شرط اولیه در تمام حوزه‌ی حل و در تمام زوایای نوسان (یا همان فواصل زمانی) در نظر گرفته می‌شود: $w^0 = w_\infty$ که w^0 مقدار متغیرهای جریان در زمان صفر است.

با توجه به میدان جریان حل، شرایط مرزی مسأله به دو قسمت شرایط مرزی دیواره و مرز بیرونی (به اندازه‌ی کافی دور از دیواره) تقسیم می‌شود.

شرایط مرزی دیواره. با توجه به عدم نفوذ جریان به یا از دیواره، شار جریان در دیواره صفر می‌باشد. برای معادلات اویلر به‌دلیل عدم وجود لزجت، سرعت در راستای عمود بر سطح جسم مساوی سرعت جسم است و در راستای مماس بر سطح از معادله‌ی مومنتوم در این راستا به‌دست می‌آید. یا به‌عبارتی بردار سرعت، مماس بر سطح دیواره می‌باشد: $(\hat{v}.\hat{n})_{surface} = 0$

در رابطه‌ی فوق $\hat{n}$ بردار نرمال سطح می‌باشد. اما برای جریان لزج (معادلات ناویراستوکس) به‌دلیل وجود لزجت، شرایط عدم لغزش را روی دیواره خواهیم داشت ($v=0$) لذا علاوه مؤلفه‌ی عمودی، مؤلفه‌ی مماسی سرعت نیز صفر می‌باشد:

$$(\hat{v}.\hat{t})_{surface} = 0$$

که $\hat{t}$ بردار واحد مماس سطح می‌باشد.

گرادیان چگالی روی دیواره صفر و با توجه به آدیاباتیک بودن دیواره، گرادیان دما در دیواره نیز صفر می‌باشد: $(\hat{q}.\hat{n})_{surface} = 0$ ، $(\frac{\partial \rho}{\partial n})_{surface} = 0$

هم‌چنین گرادیان فشار نیز روی سطح صفر می‌باشد:

$$(\frac{\partial P}{\partial n})_{surface} = 0$$

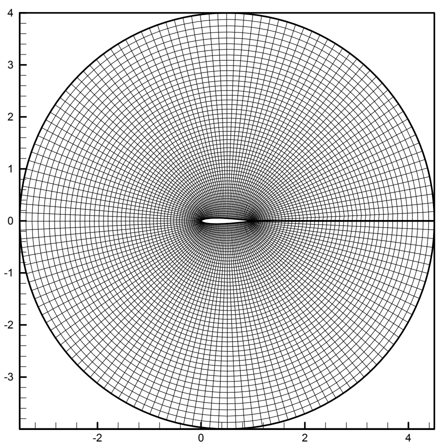
شرایط مرزی مرز دور دست. مرز بیرونی معمولاً در فاصله‌ی حدود ۳ تا ۵ برابر قطر (chord) ایرفویل از محل ایرفویل قرار می‌گیرد (شکل ۱–a). محل مرزهای داخلی و خارجی به‌کار رفته در این کار، در شکل (۱– b) به‌خوبی نشان داده شده است.

شرایط مرزی دوردست، خود به دو قسمت تقسیم می‌شود. شرایط مرزی ورودی که ناشی از جریان بالادست است و از شرایط جریان آزاد تأثیر می‌پذیرد. و شرایط مرزی در خروج که به دلیل سرعت‌های بالا، در حدود ماخ یک از برون‌یابی جریان بالادست حاصل می‌شود. لذا مطابق با خواص رژیم جریان گذر صوتی، کمیت‌های جریان (ρ، u، v و p) در مرز ورودی (جریان بالادست) به مقادیر جریان آزاد برابر قرار داده می‌شوند:

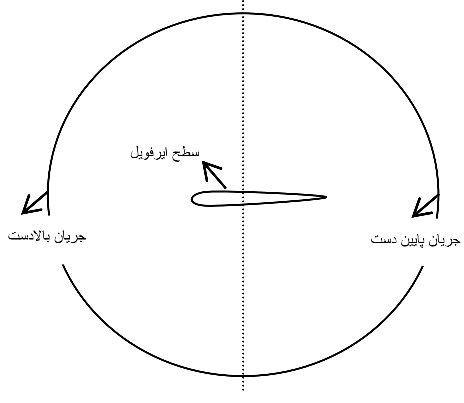
$$\begin{cases} u = u_\infty \\ v = v_\infty \end{cases} , \begin{cases} \rho = \rho_\infty \\ P = P_\infty \end{cases}$$

و در مرز خروجی (پایین دست)، این کمیت‌ها از مقادیر داخلی برون‌یابی می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial \rho}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$



(a)



(b)

شکل ۱ a) O- Grid mesh استفاده شده در این تحقیق به‌عنوان شبکه‌ی محاسباتی. b) مرزهای مختلف در شبکه‌ی حل

مدل آشفته‌ی بالدوین- لوماکس

مدل آشفته‌ی بالدوین- لوماکس [26] یک مدل جبری برای تعیین لزجت توربولانسی می‌باشد.

لزجت توربولانس به‌عنوان تابعی از پروفیل سرعت لایه‌ی مرزی محلی می‌باشد. این مدل برای جریان‌هایی با سرعت‌های بالا با لایه‌ی مرزی نازک (نظیر این‌جا) مناسب می‌باشد. فرمولاسیون لزجت گردابه‌ای لایه دوگانه (dual layered eddy viscosity) برای تکمیل معادلات ناویراستوکس رینولدز متوسط‌گیری شده (Reynolds Averaged Navier-Stokes: RANS) کفایت می‌کند.

رویکرد این مدل بدین صورت است که آشفتگی داخل لایه‌ی مرزی را به دو ناحیه‌ی مجزا تقسیم می‌کند: ناحیه‌ی داخلی که خیلی نزدیک به دیواره است و ناحیه‌ی خارجی. ضریب turbulent eddy viscosity با استفاده از رابطه‌ی (١٤) محاسبه می‌شود:

$$\frac{\mu_{turb}}{\mu_\infty} = \begin{cases} \mu_{turb_{inner}}, & \text{where } y < y_{crossover} \\ \mu_{turb_{outer}}, & \text{where } y > y_{crossover} \end{cases} \quad (١٤)$$

که $y_{crossover}$ کم‌ترین فاصله‌ی عمودی بدون بعد از دیواره است که در آن فرمولاسیون لزجت گردابه‌ای ناحیه‌ی خارجی و داخلی نتیجه‌ی یکسانی را به‌دست می‌دهد. در نهایت پس از محاسبه‌ی μ_{turb} (برای جزئیات بیشتر رجوع شود به مرجع [26])، لزجت جریان به‌صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\mu = \mu_{lam} + \mu_{turb} \quad (١٥)$$

که μ_{lam} لزجت جریان آرام است و توسط معادله‌ی ساترلند (Sutherland) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{lam} = \frac{(1.458\times10^{-6})T^{\frac{3}{2}}}{T+110.4} \quad (١٦)$$

نتایج و بحث

این بخش نتایج شبیه‌سازی با استفاده از هر دو معادله‌ی Euler و RANS را ارائه می‌دهد. هم‌چنین نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی و روش‌های عدی دیگری مقایسه شده‌اند.

نمونه‌های مورد بررسی

ایرفویل‌های نوسانی کاربرد وسیعی در اعتبارسنجی الگوریتم‌های عددی و مقایسه‌ی نتایج آن‌ها با نتایج آزمایشگاهی و دیگر نتایج عددی محرز دارند. این تحقیق از دو ایرفویل مختلف استفاده می‌کند؛ ایرفویل‌های NACA 0012 (CT1 و CT5) و NACA 64A010 (CT6). خواص و پارامترهای مهم این نمونه‌ها، در جدول (١) خلاصه شده‌اند.

جدول ١ مشخصات ایرفویل تست‌شده [27, 28]

توضیح	متغیر	Davis Experiment	Landon Experiment	Landon Experiment
AGARD Case Number		CT6	CT1	CT5
ایرفویل		NACA 64A010	NACA 0012	NACA 0012
زاویه‌ی حمله متوسط (درجه)	α_m	0.0°	2.89°	0.016°
تغییرات زاویه‌ی حمله (درجه)	α_0	±1.01°	±2.41°	±2.51°
عدد رینولدز	Re	12.56×10^6	4.8×10^6	5.5×10^6
عدد ماخ	M_∞	0.796	0.6	0.755
فرکانس	k_c	0.202	0.0808	0.0814
محور نوسان (درصد قطر)	x_m	24.8	27.3	25

ایرفویل مورد مطالعه در معرض یک حرکت نوسانی اجباری در یک میدان جریان از هوا می‌باشد.

حرکت نوسانی سینوسی ایرفویل به‌صورت تابع تغییرات زاویه‌ی حمله نسبت به زمان به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t) \quad (۱۷)$$

که α_m زاویه‌ی حمله متوسط، α_0 ماکزیمم دامنه‌ی نوسان نسبت به مقدار متوسط و ω سرعت زاویه‌ای که به‌صورت جمله‌ی بدون بعد فرکانس کاهیده k_c بیان می‌شود. فرکانس کاهیده به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k_c = \frac{\omega l_c}{2U_\infty} \quad (۱۸)$$

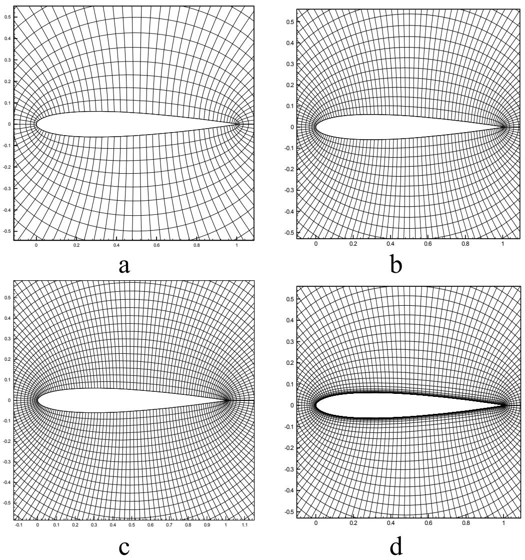
که در آن طول مشخصه‌ی l_c، اندازه‌ی وتر ایرفویل و U_∞ سرعت جریان آزاد می‌باشد.

شبکه محاسباتی

اولین قدم در شبیه‌سازی عددی، تعریف شبکه‌ای از نقاط برای حل متغیرهای مسأله در آن نقاط می‌باشد. تولید شبکه یک بخش مهم در مطالعه‌ی هندسه‌های پیچیده است. انتخاب نوع شبکه معمولاً برمبنای پیچیدگی هندسه و دست‌یابی به سطح مطلوبی از دقت حل می‌باشد.

شبکه‌ی استفاده‌شده در این کار یک شبکه‌ی O-mesh با مرز بیرونی به‌اندازه‌ی کافی دور از جسم، برای جلوگیری از متأثر شدن مرز خارجی از حضور جسم می‌باشد. (شکل ۱- a). در این‌جا برای هر یک از معادلات اویلر و ناویر-استوکس مش جداگانه‌ای در نظر گرفته شده است. در قسمت اول که برای ارائه‌ی نتایج CT6 از معادلات اویلر برای شبیه‌سازی مسأله استفاده شده است، در نزدیک سطح ایرفویل نیازی به ریزکردن زیادی شبکه (به‌جز در محل تشکیل موج ضربه‌ای)، وجود ندارد و چیزی که بیش‌تر مهم است یک‌نواختی و نظم شبکه می‌باشد (شکل ۲ - a تا c).

اما در قسمت دوم آن‌جایی که معادلات ناویر-استوکس برای شبیه‌سازی جریان حول ایرفویل CT5 به‌کار رفته‌اند، به‌دلیل وجود اثرات لزجت و متعاقب آن تشکیل لایه‌ی مرزی و برهم‌کنش آن با موج ضربه‌ای، نیاز است که شبکه در نزدیکی سطح ایرفویل ریزتر شود (شکل ۲- د). شبکه‌ی محاسباتی زیر توسط حل معادلات پواسون به‌دست آمده است.

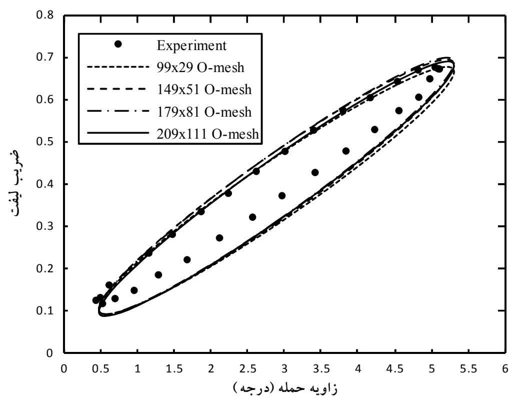


شکل ۲ شبکه‌ی محاسباتی O-mesh استفاده‌شده در تحلیل میدان جریان. a) ۲۹×۹۹ نقطه در شبکه برای محاسبات جریان غیرلزج، b) ۵۱×۱۴۹ نقطه در شبکه برای جریان غیرلزج، c) ۸۱×۱۷۹ نقطه در شبکه برای جریان غیرلزج، d) ۵۱×۱۴۹ نقطه در شبکه برای جریان لزج.

در شکل (۲) شبکه‌های استفاده‌شده با ابعاد nx×ny را ملاحظه می‌کنیم (nx تعداد سلول در امتداد محیطی ایرفویل، و ny تعداد سلول در راستای شعاعی ایرفویل می‌باشد). همان‌طور که در شکل (۲- a تا d) ملاحظه می‌شود، اندازه‌ی سلول‌های شبکه در نواحی نزدیک دیواره، جایی که اثرات لزجت قابل توجه است، برای دو حالت معادلات اویلر و ناویر-استوکس، متفاوت می‌باشد.

استقلال از شبکه

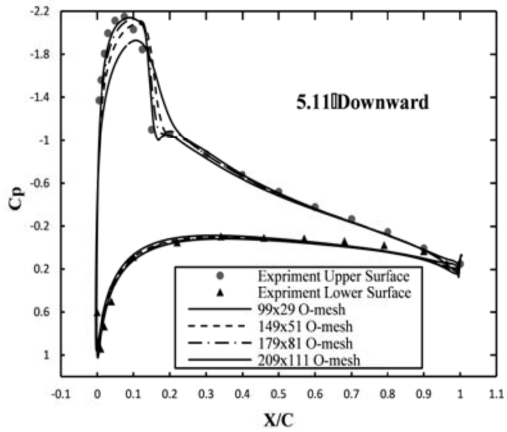
تحقیق در مورد مستقل بودن روش حل از شبکه‌ی محاسباتی، یکی از قسمت‌های مهم تصدیق یک روش عددی می‌باشد. در این‌جا برای تأیید عدم وابستگی روش حل به شبکه، نتایج ضریب فشار (pressure coefficient (Cp)) و ضریب نیروی عمودی (pressure coefficient (C*l*)) برای یکی از ایرفول‌ها (CT1) برای شبکه با ابعاد مختلف (شبکه‌ی خیلی نرم، نرم، متوسط و خشن) به‌ترتیب در شکل‌های (٤ و ٣) آمده است (توجه: عنوان Downward (رو به پایین) در شکل (٤)، اشاره به جهت چرخش در زاویه‌ی مربوط دارد).



شکل ٣ تغییرات ضریب لیفت به‌صورت تابعی از زاویه‌ی حمله برای شبکه‌های مختلف، برای ایرفویل CT1

از آن‌جایی که تغییر چندانی در نتایج ضریب لیفت مشاهده نمی‌شود به نظر می‌رسد برای شبکه‌هایی در ابعاد فوق، حل مستقل از شبکه باشد. اما برای بررسی بیشتر نتایج ضریب فشار را در یک زاویه‌ای که موج ضربه‌ای اتفاق می‌افتد (برای این‌که تغییرات شدیدتر است) بررسی می‌کنیم.

با توجه به شکل (٤) مشاهده می‌شود که تنها شبکه‌ی با ابعاد ٩٩×٢٩ برای تسخیر درست موج ضربه‌ای در جریان مناسب نمی‌باشد، اما سایر شبکه‌ها جواب نزدیک به هم و خوبی را (در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی) به‌دست می‌دهند. لذا از آن به بعد با ریزتر کردن شبکه، تغییر چندانی در حل به وجود نمی‌آید و نیازی به ریزتر کردن شبکه و تحمل هزینه‌ی اضافی آن نمی‌باشد.

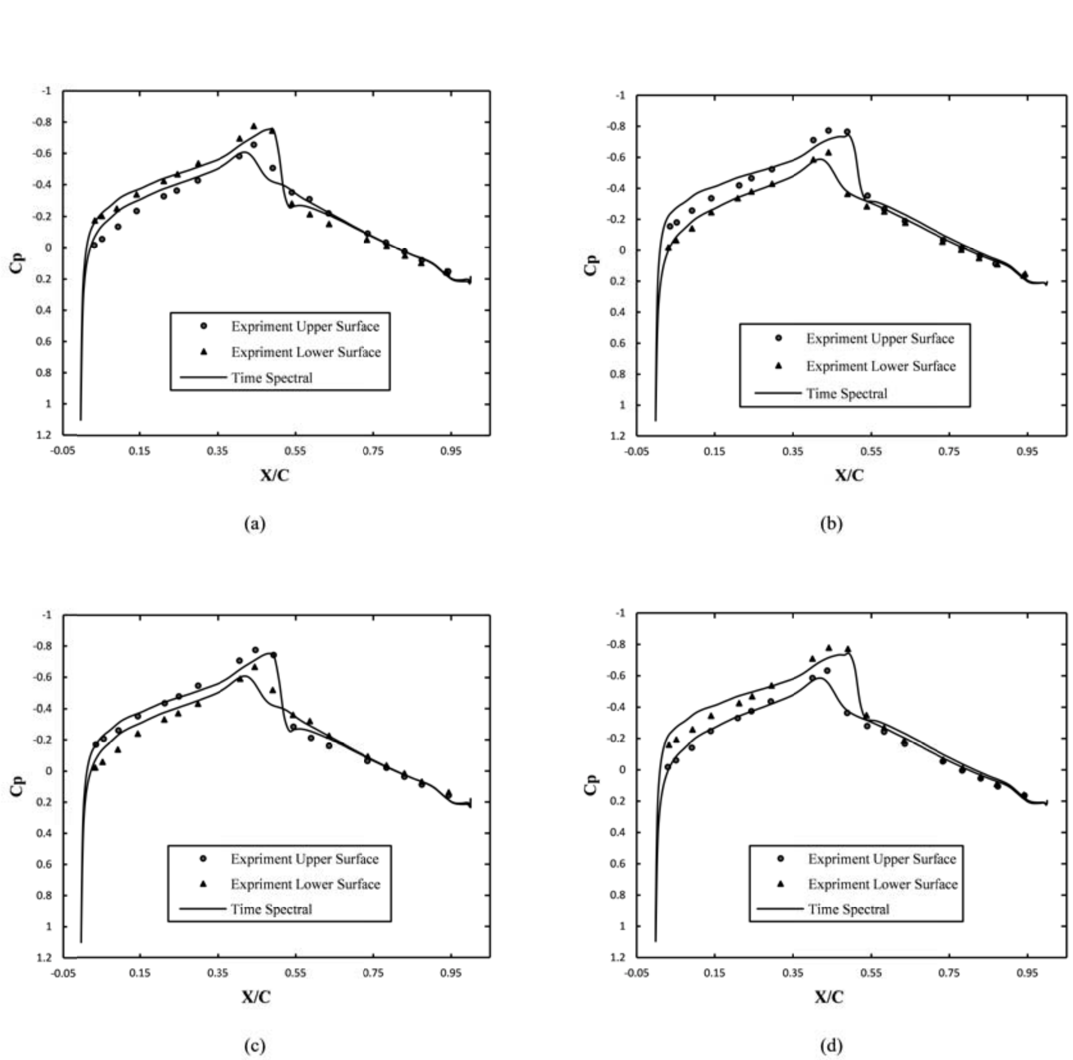


شکل ٤ تغییرات ضریب فشار روی سطح ایرفویل (CT1) برای شبکه‌های مختلف

با توجه به توضیحات و نتایج فوق، روش طیفی زمانی به تغییرات شبکه حساس نیست. برای ارائه‌ی نتایج قسمت‌های بعدی از مش با اندازه‌ی (١٧٩×٨١) استفاده شده است.

نتایج جریان غیرلزج برای ایرفویل NACA 64A010

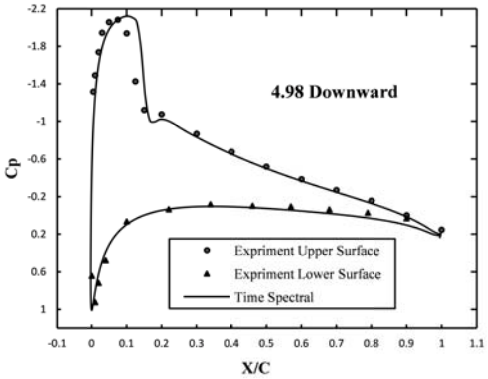
ضریب فشار. هر دو شکل (٦ و٥)، نتایج عددی (TSM) و آزمایشگاهی را برای CP در طول ایرفویل CT6 در هر یک چهارم پریود (فاز 0.0°، 90.0°، 180.0° و 270.0°) و ایرفویل CT1 در یکی از زوایایی که نتایج تجربی آن موجود است، نشان می‌دهند. مطابقت بین نتایج عددی و آزمایشگاهی به‌خوبی مشهود است.



شکل ۵ مقایسه‌ی نتایج عددی ضریب فشار (Cp) بر سطح ایرفویل با داده‌های آزمایشگاهی [27]. (a) فاز 0.0°، Upward $\alpha = 0.0^\circ$، (b) فاز 90.0°، $\alpha = 1.01^\circ$، (c) فاز 180.0°، Downward $\alpha = 0.0^\circ$. (d) فاز 270.0°، $\alpha = -1.01^\circ$

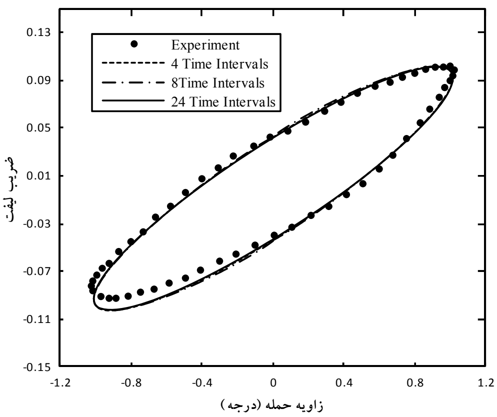
این نمودارها دقت بالای روش طیفی زمانی را در شبیه‌سازی جریان‌های تناوبی نشان می‌دهد. از آن‌جایی که عدد ماخ جریان در سری 64A010 از ایرفویل‌های ناکا بزرگ‌تر از سری 0012 است، لذا موج ضربه‌ای ایجادشده تیزتر می‌باشد اما با توجه به دامنه‌ی نوسانات کوچک‌تر نسبت به مدل 0012، اندازه‌ی این موج ضربه‌ای کم‌تر است.

با توجه به شکل‌های (٦ و ٥) مشاهده می‌شود که روش طیفی زمانی می‌تواند برای گستره‌ی وسیعی از تغییرات زاویه‌ی حمله به‌کار رود.



شکل ٦ مقایسه‌ی نتایج عددی ضریب فشار (Cp) با داده‌های آزمایشگاهی [28]، برای ایرفویل CT1

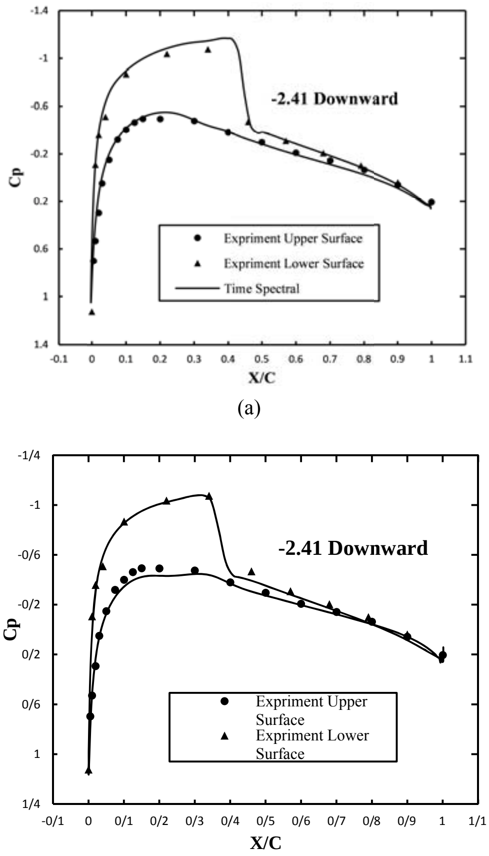
ضریب نیروی بالا برنده. شکل (۷) نتایج عددی و آزمایشگاهی ضریب لیفت را به‌صورت تابعی از زاویه‌ی حمله‌ی لحظه‌ای نشان می‌دهد. در این شکل نمودارهای بیضی‌گون ضریب لیفت بر حسب تعداد فواصل زمانی مختلف با هم مقایسه شده‌اند. این نمودارها نشان می‌دهد که افزایش تعداد فواصل زمانی حل (گام زمانی فیزیکی) تغییری در نتایج ضریب لیفت حاصل نمی‌کند و این نتایج با دقت بسیار خوبی (با مقایسه با نتایج تجربی) تنها با چهار گام زمانی در هر پریود به‌دست می‌آید. این نتیجه، بار دیگر مزیت روش طیفی زمانی را در حل مسائل ناپایدار پریودیک نشان می‌دهد؛ چرا که با تعداد گام زمانی اندک (فواصل زمانی بزرگ) در طول یک پریود زمانی، به جواب‌های مناسب و قابل قبولی می‌رسد و این باعث کاهش زمان حل می‌شود.



شکل ۷ مقایسه‌ی نتایج ضریب لیفت بر حسب زاویه‌ی حمله‌ی لحظه‌ای با نتایج آزمایشگاهی [27] برای ایرفویل CT6

نتایج شبیه‌سازی جریان لزج و غیر لزج برای ایرفویل NACA 0012 (CT5)

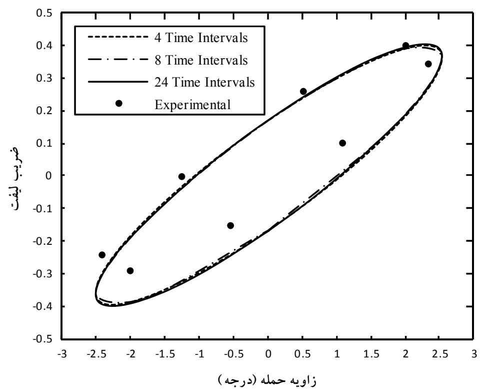
شکل‌های (۸ -a و b)، نتایج ضریب فشار (CP) را در طول ایرفویل CT5 در یک زاویه‌ی حمله‌ی مشخص، به‌ترتیب در یک جریان لزج و غیر لزج نشان می‌دهد. با مقایسه‌ی این دو شکل مشاهده می‌شود، تغییرات شدید در نمودارهای Cp که ناشی از تولید موج ضربه‌ای در آن محل می‌باشد، در جریان ویسکوز ملایم‌تر از جریان غیرلزج می‌باشد. این به‌دلیل برهم کنش لایه‌ی مرزی با موج ضربه‌ای است. چرا که وجود لزجت در موج ضربه‌ای ایجاد شده تأثیرگذار است و باعث ملایم‌تر شدن آن می‌شود. در نتایج جریان لزج، از مدل توربولانسی بالدوین- لوماکس استفاده شده است.



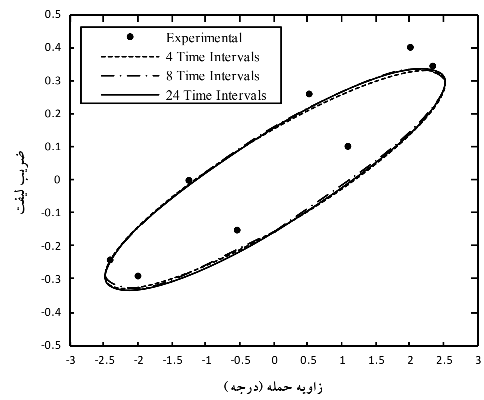
شکل ۸ مقایسه‌ی نتایج عددی ضریب فشار (Cp) با داده‌های آزمایشگاهی [27] برای ایرفویل NACA 0012 مدل CT5. (a) جریان غیرلزج، (b) جریان لزج

نتایج ضریب لیفت. شکل‌های (۹ -a و b) تغییرات ضریب لیفت بر حسب زاویه‌ی حمله را به‌ترتیب در جریان غیر لزج و لزج نشان می‌دهد. مقایسه‌ی این دو

شکل نشان می‌دهد که مدل توربولنسی بالدوین- لوماکس در زوایای حمله‌ی کوچک‌تر به‌تر عمل می‌کند، و نتایج عددی را به نتایج تجربی نزدیک می‌کند، اما در زوایای حمله‌ی بالاتر، یک مدل توربولنسی موفق نمی‌باشد، چرا که نتایج به‌تری نسبت به مدل غیرلزج ارائه نمی‌دهد.



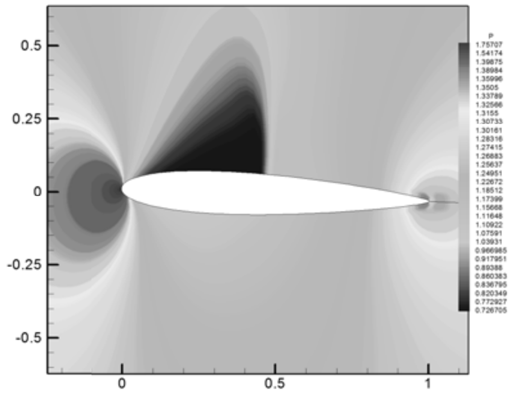
(a)



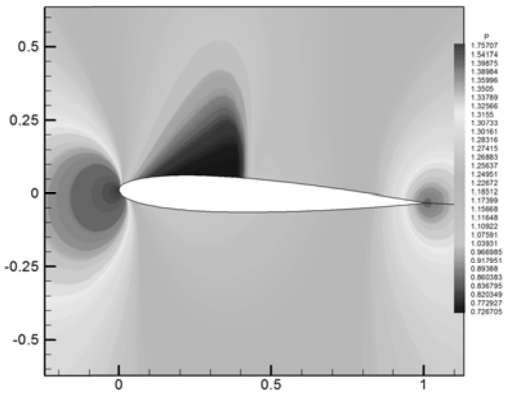
(b)

شکل ۹ مقایسه‌ی نتایج عددی ضریب فشار (Cp) با داده‌های آزمایشگاهی [28] برای ایرفویل NACA 0012 مدل CT5، (a) جریان غیرلزج، (b) جریان لزج

توزیع فشار لحظه‌ای. در ادامه، شکل‌های (۱۰-a و b) کانتورهای فشار لحظه‌ای حول ایرفویل نوسانی را در لحظه‌ای که ایرفویل در بیش‌ترین زاویه‌ی حمله در یک پریود قرار دارد، نشان می‌دهد.



(a)



(b)

شکل ۱۰ کانتورهای فشار حول ایروفیل CT5 در زاویه‌ی $\alpha = \alpha_{max} = 2.526°$. (a) جریان غیرلزج، (b) جریان لزج

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در جریان لزج به‌دلیل برهم کنش موج ضربه‌ای با لایه‌ی مرزی، موج ضربه‌ای تشکیل‌شده نسبت به حالت جریان غیرلزج ضعیف‌تر می‌باشد و تغییرات فشار ملایم‌تر است. این نتیجه کاملاً از مقایسه‌ی شکل‌های (۱۰-a و b) مشخص می‌شود.

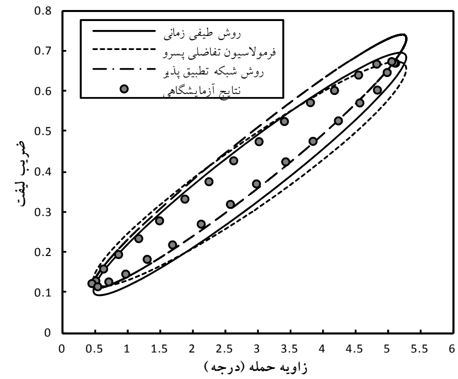
آنالیز مقایسه‌ای از نتایج روش طیفی زمانی با روش‌های عددی قدیمی‌تر

در این بخش، سه روش حل مسائل آیرودینامیک ناپایدار پریودیک با یکدیگر مقایسه می‌شوند. شکل (۱۱) نمودار ضریب لیفت را بر حسب تغییرات

زاویه‌ی حمله برای ایرفویل CT1 نشان می‌دهد. این ضریب از سه روش طیفی زمانی (TSM)، فرمولاسیون تفاضلی پسرو (BDF) و شبکه‌ی سازمان یافته‌ی تطبیق‌پذیر صریح (explicit structured adaptive grid) به‌دست آمده است. همه‌ی محاسبات توسط یک سیستم پردازشگر یکسان با مشخصات Core™2 Duo CPU, 2.66 MHz's، انجام شده است. بر اساس این محاسبات، روش تطبیق شبکه برای رسیدن به همگرایی مناسب، نیازمند زمانی معادل ۱۵۰ دقیقه می‌باشد. اما این زمان برای روش طیفی زمانی با یک پردازنده‌ی یکسان، تنها ۸ دقیقه است.

هم‌چنین برای همگرایی و به‌دست آوردن جواب نسبتاً مناسب با روش BDF، تعداد ۲۰۰ فاصله‌ی زمانی نیاز است. در حالی که روش طیفی زمانی نتایج نسبتاً به‌تری را تنها با ٤ فاصله‌ی زمانی به‌دست می‌دهد. این تفاوت‌ها در دقت و سرعت همگرایی قابل توجه هستند، خصوصاً برای مسائل سه‌بعدی که بسیار زمان‌بر هستند و با افزایش تعداد گام زمانی، زمان محاسبات به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

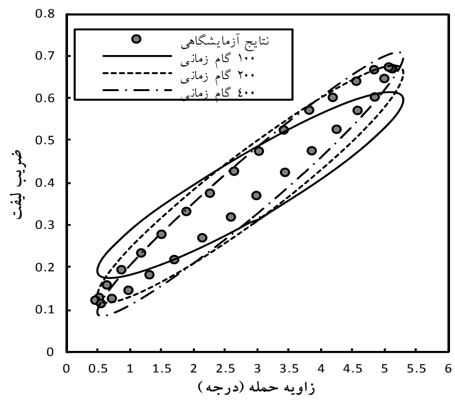
این نتایج دقت مناسب و سرعت بالای روش طیفی زمانی را در تحلیل مسائل ناپایدار پریودیک نشان می‌دهد.



شکل ۱۱ مقایسه‌ی نتایج ضریب لیفت (Cl) حاصل از روش طیفی زمانی با نتایج روش‌های BDF و شبکه‌ی سازمان‌یافته‌ی تطبیق‌پذیر (ایرفویل CT1)

شایان ذکر است که این مقایسه‌ها از آن جهت قابل قبول و معنی‌دار است که روش گسسته‌سازی مکانی در هر سه روش یکسان است و تنها تفاوت در محاسبه‌ی جمله‌ی ناپایداری (مشتق زمانی) در معادلات و الگوریتم حل در هر گام زمانی می‌باشد.

شکل (۱۲) نتایج ضریب لیفت را به‌ازای تعداد گام زمانی مختلف نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که بر خلاف روش طیفی زمانی، با افزایش تعداد فواصل زمانی (کاهش طول گام زمانی) دقت حل افزایش می‌یابد. البته این به قیمت افزایش زمان حل نیز هست، به‌طوری که برای تعداد گام‌های زمانی بالا، زمان حل به‌طور قابل توجهی نسبت به روش طیفی افزایش می‌یابد.



شکل ۱۲ مقایسه نتایج ضریب لیفت (Cl) با استفاده از روش BDF به ازای تعداد فواصل زمانی مختلف (ایرفویل CT1).

مقایسه‌ی نتایج شکل‌های (۱۲ و ۱۱) مزیت روش طیفی زمانی در حل مسائل ناپایدار پریودیک را نشان می‌دهد که با تعداد فواصل زمانی کم، و در نتیجه نرخ همگرایی بالا، دقت مناسب را نیز حفظ می‌کند. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این مزیت در شبیه‌سازی عددی مسائل سه‌بعدی که بسیار زمان‌بر است و انتخاب تعداد گام زمانی اندک با استفاده از روش طیفی زمانی، می‌تواند به تسریع حل، در عین حالی که دقت مناسبی داشته باشد، کمک کند.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق روش طیفی زمانی (TSM) به‌عنوان یک روش مناسب برای تحلیل جریان‌های ناپایدار پریودیک نسبت به زمان، نشان داده شد. این روش تنها نیاز به تعداد چهار گام زمانی در طول یک پریود برای تسخیر صحیح فیزیک جریان دارد. از آن‌جا که این تعداد گام زمانی بسیار کم‌تر از تعداد مشابه در روش‌های سنتی می‌باشد، روش طیفی زمانی در عین حفظ دقت مناسب با این تعداد گام، باعث کاهش چشمگیر هزینه‌ی محاسبات در مقایسه با طرح‌های سنتی نظیر BDF و شبکه‌ی تطبیق‌پذیر می‌شود.

انطباق راحت و ساده با یک کد حل‌کننده‌ی زمان دقیق، دیگر مزیت این روش می‌باشد. چنان‌چه در این‌جا نشان داده شد، این روش تمام محاسبات را در حوزه‌ی زمان حل می‌کند و لذا به تغییرات کمی در یک حل کننده‌ی زمان دقیق، نیاز است. در صورتی که در الگوریتم‌های فوریه مبنای مشابه، نظیر NLFD، نیاز به تبدیلات مستقیم و معکوس در حوزه‌ی زمانی و فرکانسی می‌باشد.

الگوریتم TSM در شبیه‌سازی عددی جریان ناپایدار حول ایرفویل‌های نوسانی در هر دو حالت دامنه‌ی نوسانات پایین (CT6) و دامنه‌ی نوسانات بالا (CT1 و CT5)، موفق عمل می‌کند و محدودیتی در گستره‌ی تغییرات زاویه‌ی حمله ندارد. چیزی که در روش‌هایی مانند شبکه‌ی تطبیق‌پذیر باعث ایجاد محدودیت می‌شود به‌طوری که این روش تنها برای تغییرات محدود زاویه‌ی حمله می‌تواند به‌کار رود.

مدل آشفته‌ی بالدوین- لوماکس برای جریان‌های با سرعت بالا و در نتیجه لایه‌ی مرزی نازک (مانند این تحقیق) مناسب می‌باشد؛ اما برای مواردی با نواحی جدایی بزرگ، زوایای حمله‌ی بالا و اثرات انحنای زیاد در جریان مناسب نیست. با این وجود، دارای این مزیت است که به‌کارگیری آن برای یک کد حل‌کننده ناویراستوکس، ساده می‌باشد.

مراجع

1. McCroskey, W. J., "Inviscid Flow Field of an Unsteady Airfoil", *AIAA Journal*, Vol. 11, pp. 1130-1137, (1973).
2. McCroskey, W. J., "Unsteady Airfoils", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Palo Alto, CA, Vol. 14, pp. 285-311, (1982).
3. Rausch, Russ D., Yang, Henry T. Y., and Batina, John T., "Euler Flutter Analysis of Airfoils Using Unstructured Dynamic Meshes", *Journal of Aircraft*, Vol. 27, No. 5, pp. 436-443, (1990).
4. Anderson, J. M., Streitlien, K., Barrett, D. S. and Triantafyllou, M. S., "Oscillating Foils of High Propulsive Efficiency", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 360, pp. 41–72, (April 1998)
5. Mittal, S., "Finite element computation of unsteady viscous compressible flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 157, Issues 1–2, Pages 151–175, (April 1998).
6. Yang, Z., Sankar, L. N., Smith, M. and Bauchau, O., "Recent Improvements to a Hybrid Method for Rotors in Forward Flight", *Presented as Paper 2000–0260 at the AIAA 38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno, NV, (January 2000), *Journal of Aircraft*, Vol. 39, No. 5, pp. 804-812, (2002).
7. Zhao, Q. J., Xu, G. H. and G., Zhao J., "New Hybrid Method for Predicting the Flowfields of Helicopter Rotors. Journal of Aircraft", Vol. 43, No. 2, pp. 372–380, (2006).

8. Yang, S., Zhang, Z., Liu, F., Luo, S., Tsai, H. M. and Schuster, D., "Time-Domain Aeroelastic Simulation by a coupled Euler and Integral Boundary-Layer Method", *22nd Applied Aerodynamics Conference and Exhibit*, Rhode, Island, (2004).
9. Pasandideh Fard, M. Heidary, A. and Malekjafarian, M., "Numerical Analysis of Unsteady Flow around a Oscillator Airfoil with Moving Structured Adaptive Grid by Using Central and Upwind Schemes", *International Aerospace Conference,* Ankara, *(*August 17-19, 2009).
10. Hall, K. C., Thomas, J. P. and Clark, W. S., "Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique", *9th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines (ISUAAAT)*, Lyon, France, (September 2000), *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 5, pp. 879-886 (2002).
11. McMullen, M., Jameson, A. and Alonso, J. J., "Application of a Nonlinear Frequency Domain Solver to the Euler and Navier- Stokes Equations", *AIAA paper 02-0120, AIAA 40th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit,* Reno, NV, (January 2002).
12. McMullen, M. and Jameson, A., "The Computational Efficiency of Non-linear Frequency Domain Methods", *Journal of Computational Physics*, Vol. 212, pp. 637-661, (2006).
13. McMullen, M., Jameson, A. and Alonso, J. J., "Demonstration of Nonlinear Frequency Domain Methods", *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 7, pp. 1428-1435, (2006).
14. Gopinath, A.K. and Jameson, A., "Time Spectral Method for Periodic Unsteady Computations over Two- and Three- Dimensional Bodies"*, AIAA Paper 2005–1220, AIAA 43th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit,* Reno, NV, pp. 10683-10696, (2005).
15. Butsuntorn, N. and Jameson, A., "Time Spectral Method for Rotorcraft Flow", *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit,* Reno, NV,, *AIAA Paper 2008-0403*, (2008).
16. Butsuntorn, N. and Jameson, A., "Time Spectral Method for Rotorcraft Flow with Vorticity Confinement", *26th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Honolulu, HI, (August 18-21, 2008).
17. Sicot, F. Puigt, G. and Montagnac, M., "Block-Jacobi Implicit Algorithms for the Time Spectral Method", *AIAA Journal,* Vol.46 No.12, pp 3080-3089 (2008).
18. Su, X. and Yuan, X., "Implicit Solution of Time Spectral Method for Periodic Unsteady Flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* pp. 860-876 (2009).
19. Yang, Z. and Mavriplis, D., "Time Spectral Method for Periodic and Quasi-Periodic Unsteady Computations on Unstructured Meshes", *40th AIAA Fluid Dynamics Conference*, Illinois, (June. 28-1, 2010).
20. Yang, Z. Mavriplis, D. and Sitaraman, J., "Prediction of Helicopter Maneuver Loads Using BDF/Time Spectral Method on Unstructured Meshes", *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Florida, (Jan. 4-7, 2011).
21. Antheaume, S. and Corre, C., "Implicit Time Spectral Method For Periodic Incompressible Flows", *AIAA Journal*, Vol. 49, Issue 4, pp. 791-805, (2011).
22. Baldwin, B. S. and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows", *AIAA Paper 78 257*, (1978).
23. Davis, S.S., "NACA 64A010 (NASA Ames Model) Oscillatory Pitching", AGARD Report 702, AGARD, Dataset 2, (January 1982).

24. Landon, R.H., "NACA 0012 Oscillatory and Transient Pitching", AGARD Report 702, AGARD, Dataset 3. (January 1982).
25. Jameson, A. Schmidt, W. and Turkel, E., "Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods with Runge-Kutta time stepping schemes", *AIAA paper 81-1259, (*January 1981).
26. Moin, P., "*Spectral Methods in Computational Physics*", Supplementary notes, Stanford University, Stanford, CA, ME 408, (2003).
27. Jameson, A., "*Numerical Methods in Fluid Dynamics*", Lecture Notes in Mathematics, vol. 1127/1985, chap. Transonic Flow Calculations, pp. 156–242. Springer Berlin/Heidelberg, Princeton University MAE Report 1651, (March 1984).